第7講　軌跡と領域

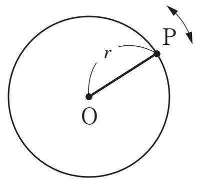
§1　軌跡の方程式

要点整理 と 公式

要点1　軌跡

「軌跡」… 与えられた条件を満たす点が動いてできる点の集合(図形)を，

その条件を満たす点の「軌跡」という。



(ex) 平面上で定点Oから一定の距離 r にある点Pの「軌跡」は，

「Oを中心とする半径 r の円」である。

要点2　2点から等距離にある点の軌跡

与えられた条件を満たす点の軌跡を，座標を用いて求めることを考える。

(ex) 2点A(0, 3)，B(3, 0)について，条件 AP = BP を満たす点Pの軌跡を求める。

点Pの座標を(x, y)とする。

$$AP = \sqrt{(x-0)^2+(y-3)^2} = \sqrt{x^2+(y-3)^2}$$

$$BP = \sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-3)^2+y^2}$$

条件 AP = BP より $AP^2 = BP^2$

つまり $x^2+(y-3)^2 = (x-3)^2+y^2$

展開して整理すると $y = x$

よって，点Pは 直線 $y = x$ 上にある。

逆に，直線 $y = x$ 上のすべての点は，条件 AP = BP を満たす。

したがって，求める点Pの軌跡は　直線 $y = x$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

座標を用いて軌跡を求める手順は以下。

■ 軌跡を求める手順

①　条件を満たす点を$(x,\ y)$などで表し，与えられた条件を x，y の方程式で表す。

②　表した方程式の形から，その方程式が表す図形を求める。

③　②の図形上のすべての点が，与えられた条件を満たすことを確かめる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

2点A(2, 5), B(6, 3)から等距離にある点Pの軌跡を求めよ。

Point Pickup

点Pの軌跡の求め方

① 点Pの座標を (x, y) とする。

② 点Pに関する条件から, x, y の方程式を立てる。

③ ②の式を整理し, 方程式が表す図形を求める。

④ 逆の確認をする。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 いろいろな軌跡

要点整理 と 公式

要点3 2点からの距離の比が一定な点の軌跡

2点A$(1,\ 1)$，B$(4,\ 7)$からの距離の比が$1:2$である点Pの軌跡を求める。

点Pの座標を$(x,\ y)$とする。

点Pの満たす条件は　$AP:BP=1:2$

つまり$BP=2AP$より　$BP^2=4AP^2$

よって　$(x-4)^2+(y-7)^2=4\{(x-1)^2+(y-1)^2\}$

$$x^2-8x+16+y^2-14y+49=4(x^2-2x+1+y^2-2y+1)$$

$$3x^2+3y^2+6y-57=0$$

$$x^2+y^2+2y-19=0$$

$$x^2+(y+1)^2=20$$

ゆえに，点Pは円$x^2+(y+1)^2=20$上にある。

逆に，この円上のすべての点は条件を満たす。

したがって，求める点Pの軌跡は

中心$(0,\ -1)$，半径$2\sqrt{5}$の円 である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

2点 A(4, 0), B(−2, 0)について，次の条件を満たす点の軌跡を求めよ。

(1)　$AP^2 + BP^2 = 20$ を満たす点 P

(2)　AQ：BQ = 2：1 を満たす点 Q

Point Pickup

軌跡が「円」となるときの答え方

条件を満たす点の軌跡が「円」になる場合，その答え方として

・中心の座標と半径

・方程式

のいずれの答え方でもよい。図形名「円」を忘れないこと。

（ex）軌跡を表す方程式が $(x-1)^2+(y-2)^2=9$ のとき，その軌跡の答え方は

・中心 (1, 2)，半径 3 の円

・円 $(x-1)^2+(y-2)^2=9$

のいずれでもよい。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

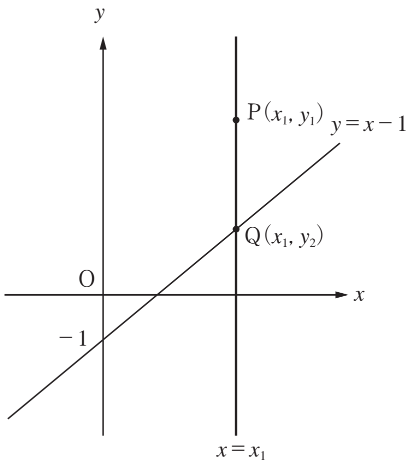
§3 不等式の表す領域

要点整理 と 公式

要点4 直線を境界とする領域

「領域」… x，y に関する不等式があるとき，それをみたす点 (x, y) 全体の集合を，

その不等式の表す「領域」という。



不等式 $y > x-1$ の表す領域について考える。

点P (x_1, y_1)がこの領域にあれば，

$y_1 > x_1 - 1$ … ①

が成り立つ。

また，点Pを通り y 軸に平行な直線 $x = x_1$ と

$y = x-1$ との交点をQ (x_1, y_2)とすると

$y_2 = x_1 - 1$ … ②

である。

①，②より $y_1 > y_2$ である。

よって，点Pは点Qより「　　　」にあり，

すべての x_1 に関してこれは成立する。

したがって，点Pは直線 $y = x-1$ より上側にある。

よって，$y > x-1$ の表す領域は，直線 $y = x-1$ より上側である。

同様に，$y < x-1$ の表す領域は，直線 $y = x-1$ より下側である。

一般に，直線で分けられた領域について，次のことがいえる。

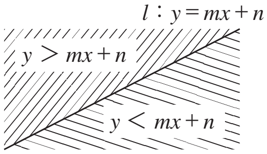
■ 直線を境界とする領域

直線 $y = mx + n$ を l とすると

不等式 $y > mx + n$ の表す領域は 直線 l の上側

不等式 $y < mx + n$ の表す領域は 直線 l の下側

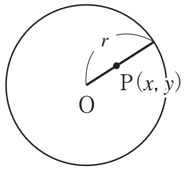
いずれも，境界線 $y = mx + n$ は含まない。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点⑤ 円を境界とする領域

不等式 $x^2+y^2<r^2$ の表す領域について考える。



この領域に含まれる点を P $(x,\ y)$とすると，

原点から P までの距離 OP について

$\mathrm{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$ つまり $\mathrm{OP}^2=x^2+y^2$ が成り立つ。

よって，$\mathrm{OP}^2<r^2$ つまり $\mathrm{OP}<r$ が成り立つ。

これは点 P が，原点中心，半径 r の円 $x^2+y^2=r^2$ の内部にあることを示している。

よって，$x^2+y^2<r^2$ の表す領域は，円 $x^2+y^2=r^2$ の内部である。

同様に，$x^2+y^2>r^2$ の表す領域は，円 $x^2+y^2=r^2$ の外部である。

一般に，次のことがいえる。

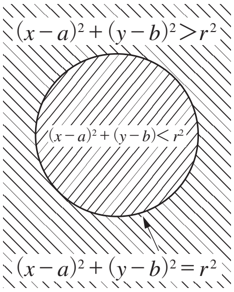
■ 円を境界とする領域

円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を C とすると

　不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ の表す領域は 円 C の内部

　不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$ の表す領域は 円 C の外部

いずれも，境界線 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ は含まない。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$y > 2x + 1$

(2)　$y \leqq -\dfrac{1}{3}x + 1$

(3)　$x \geqq 1$

(4)　$y - 2 < 0$

(5)　$x^2 + y^2 < 9$

(6)　$(x-1)^2 + (y-2)^2 \geqq 2$

Point Pickup

直線を境界とする領域とその図示

不等式　$y > mx + n$ …　直線　$y = mx + n$ の「上側」

不等式　$y < mx + n$ …　直線　$y = mx + n$ の「下側」

不等式　$(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$ … 円 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ の「内部」

不等式　$(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$ … 円 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ の「外部」

いずれも境界線　$y = mx + n$ や　$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ は「含まない」。

不等号が「≧」や「≦」となっている場合は，境界線を「含む」。

不等式を表す領域を図示する方法

①　境界線(直線など)を図示する。必要に応じて「切片」を記入するとよい。

②　不等式の表す部分に斜線を入れる。

③　境界線を含むか含まないかを明記する。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ 連立不等式の表す領域

要点整理 と 公式

要点6 連立不等式の表す領域

x, y についての連立不等式の表す領域は，それぞれの不等式を「同時に」満たす点$(x,\ y)$の集合であり，それぞれの不等式が表す領域の「共通部分」である。

(ex) 連立不等式

$$\begin{cases} x+y<2 & \cdots ① \\ 2x-y<1 & \cdots ② \end{cases}$$

の表す領域を図示する。

①を変形すると $y<-x+2$ より，①の表す領域は

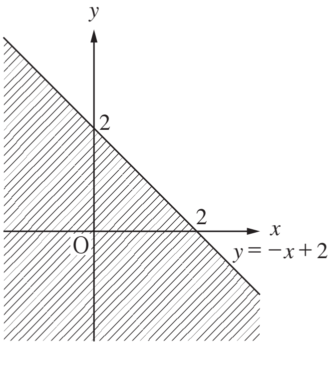
直線 $y=-x+2$ の「　　側」である。

②を変形すると $y>2x-1$ より，②の表す領域は

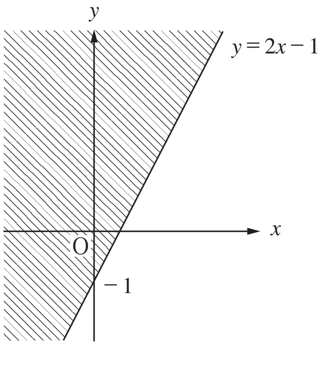
直線 $y=2x-1$ の「　　側」である。

求める領域は，これら2つの領域の共通部分である。

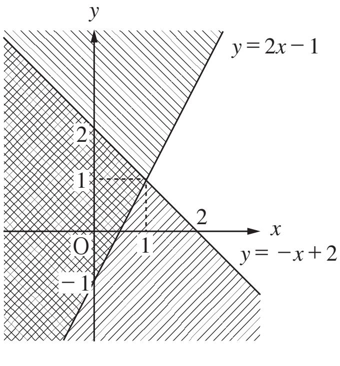
①の表す領域



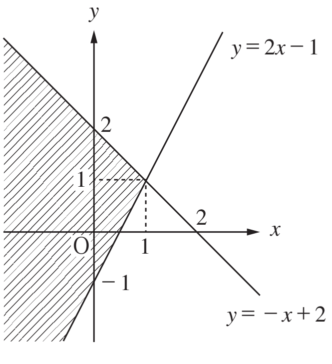
②の表す領域



①と②の共通部分



よって，求める領域は下図斜線部分。境界線は含まない。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $\begin{cases} x+y-3>0 \\ x-y-3<0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 9 \\ y \leqq x+3 \end{cases}$

Point Pickup

連立不等式の表す領域

⟹　それぞれの不等式の表す領域の共通部分を図示する。手順は以下。

①　それぞれの不等式の「境界線」を求め，図示する。

②　①の境界線に「共有点」があれば，それを求める。

③　それぞれの不等式の表す領域を考え，その「共通部分」に斜線を入れる。

④　境界線を含むか含まないかを明記する。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第7講　確認テスト

1　2点 A(1, 0)，B(0, 2)から等しい距離にある点 P の軌跡は 直線 [ア] x − [イ] y +3 = 0 である。

2　2 点 A (5, 0)，B(−1, 0)からの距離の比が 2：1 である点 P の軌跡は，
中心([ウエ] , [オ])，半径 [カ] の円である。

3　次の [　　] に当てはまるものを，下の①〜⑥から選べ。ただし同じものを選んでもよい。

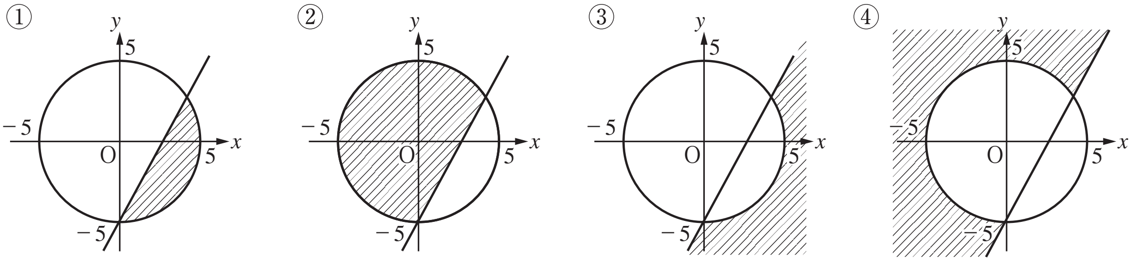
(1)　不等式 $y > x + 1$ の表す領域は，直線 $y = x + 1$ の [キ] である。
ただし境界線を [ク] 。

(2)　不等式 $x^2 + y^2 \leqq 4$ の表す領域は，円 $x^2 + y^2 = 4$ の [ケ] である。
ただし境界線を [コ] 。

①　上側　　②　下側　　③　内部　　④　外部　　⑤　含む　　⑥　含まない

4　連立不等式 $\begin{cases} 2x - y > 5 \\ x^2 + y^2 < 25 \end{cases}$ の満たす領域は [サ] である。

[サ] に当てはまるものを，下の①〜④から選べ。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第7講　軌跡と領域

1

点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

$$\mathrm{AP}=\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}$$

$$\mathrm{BP}=\sqrt{(x-6)^2+(y-3)^2}$$

点 P の満たす条件は $\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$

つまり　$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$　より

$$(x-2)^2+(y-5)^2=(x-6)^2+(y-3)^2$$

展開して整理すると $y=2x-4$

よって，点 P は 直線 $y=2x-4$ 上にある。

逆に，直線 $y=2x-4$ 上のすべての点は，条件 $\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ を満たす。

したがって，求める点 P の軌跡は 直線 $y=2x-4$

2

(1)　点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

点 P の満たす条件は $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=20$ より

$$\{(x-4)^2+y^2\}+\{(x+2)^2+y^2\}=20$$

$$x^2-8x+16+y^2+x^2+4x+4+y^2=20$$

$$2x^2+2y^2-4x=0$$

$$x^2+y^2-2x=0$$

$$(x-1)^2+y^2=1$$

ゆえに，点 P は円 $(x-1)^2+y^2=1$ 上にある。

逆に，この円上のすべての点は条件を満たす。

したがって，求める点 P の軌跡は

中心 $(1,\ 0)$，半径 1 の円 である。

(2)　点 Q の座標を $(x,\ y)$ とする。

点 Q の満たす条件は　$\mathrm{AQ}:\mathrm{BQ}=2:1$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

つまり $AQ = 2BQ$ より $AQ^2 = 4BQ^2$

$(x-4)^2 + y^2 = 4\{(x+2)^2 + y^2\}$

$x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4(x^2 + 4x + 4 + y^2)$

$x^2 + y^2 + 8x = 0$

$(x+4)^2 + y^2 = 16$

ゆえに，点 Q は円　$(x+4)^2 + y^2 = 16$　上にある。

逆に，この円上のすべての点は条件を満たす。

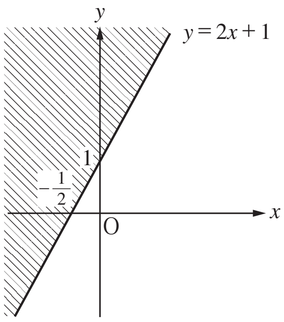
したがって，求める点 Q の軌跡は

中心 $(-4,\ 0)$，半径 4 の円 である。

3

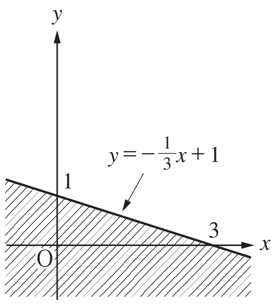
下図斜線部分

(1)



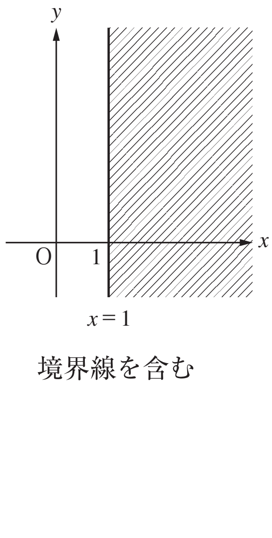
境界線を含まない

(2)



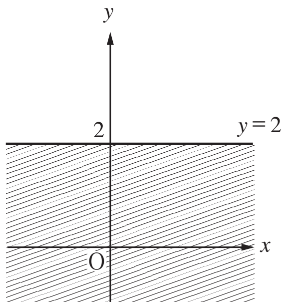
境界線を含む

(3)



境界線を含む

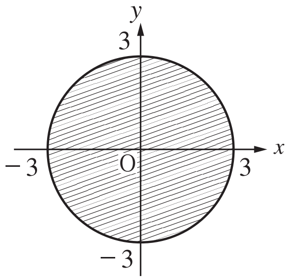
(4)



境界線を含まない

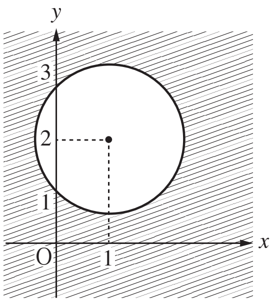
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(5)



境界線を含まない

(6)



境界線を含む

4

(1) $\begin{cases} x + y - 3 > 0 \cdots ① \\ x - y - 3 < 0 \cdots ② \end{cases}$ とする。

①より　$y > -x + 3$

よって①の表す領域は，直線　$y = -x + 3$　の上側

②より $y > x - 3$

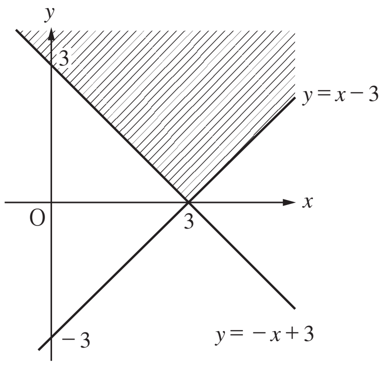
よって②の表す領域は，直線　$y = x - 3$　の上側

また２直線　$y = -x + 3$　と　$y = x - 3$　の交点の座標は

(3, 0) である。

よって，求める領域は右図斜線部分。

境界線を含まない。



(2) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqq 9 \cdots ① \\ y \leqq x + 3 \cdots ② \end{cases}$ とする。

①の表す領域は，円 $x^2 + y^2 = 9$ とその内部

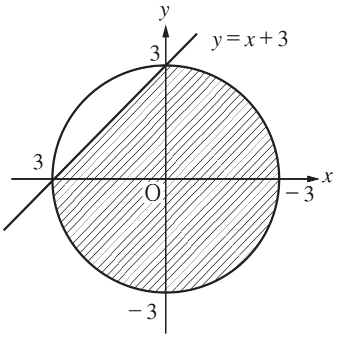
②の表す領域は，直線 $y = x + 3$ とその下側

また，円 $x^2 + y^2 = 9$ と直線 $y = x + 3$ の交点の座標は

$(-3, 0)$ と $(0, 3)$ である。

よって，求める領域は右図斜線部分。

境界線を含む。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第7講　確認テスト

1　2点 A(1, 0), B(0, 2)から等しい距離にある点 P の軌跡は 直線 $\boxed{\text{ア}}\,x - \boxed{\text{イ}}\,y + 3 = 0$ である。

2　2 点 A (5, 0), B(−1, 0)からの距離の比が 2 : 1 である点 P の軌跡は,
中心($\boxed{\text{ウエ}}$, $\boxed{\text{オ}}$), 半径 $\boxed{\text{カ}}$ の円である。

3　次の $\boxed{\quad}$ に当てはまるものを, 下の①～⑥から選べ。ただし同じものを選んでもよい。

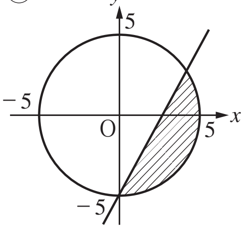
(1)　不等式 $y > x + 1$ の表す領域は, 直線 $y = x + 1$ の $\boxed{\text{キ}}$ である。
ただし境界線を $\boxed{\text{ク}}$ 。

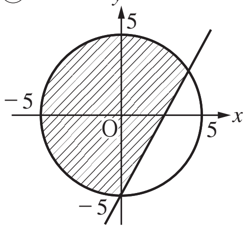
(2)　不等式 $x^2 + y^2 \leqq 4$ の表す領域は, 円 $x^2 + y^2 = 4$ の $\boxed{\text{ケ}}$ である。
ただし境界線を $\boxed{\text{コ}}$ 。

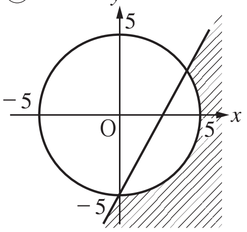
①　上側　　②　下側　　③　内部　　④　外部　　⑤　含む　　⑥　含まない

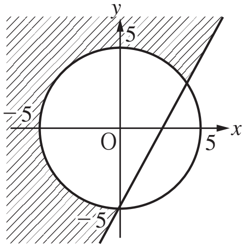
4　連立不等式 $\begin{cases} 2x - y > 5 \\ x^2 + y^2 < 25 \end{cases}$ の満たす領域は $\boxed{\text{サ}}$ である。

$\boxed{\text{サ}}$ に当てはまるものを, 下の①～④から選べ。

①


②


③


④


©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

1　ア　2　　イ　4

2　ウ　－　　エ　3　　オ　0　　カ　4

3　(1)　キ　①　　ク　⑥　　(2)　ケ　③　　コ　⑤

4　サ　①

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。